Επικαμπύλια ολοκληρώματα – Παραμετρικές καμπύλες – Εφαρμογές

1) Έστω γ η έλικα $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ με τύπο $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ και έστω η συνάρτηση $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_\gamma f(x,y,z)\, d(x,y,z)$.

ΛΥΣΗ

Εξ ορισμού του επικαμπύλιου ολοκληρώματος

$$\int_\gamma f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t, t) \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) \cdot \sqrt{2}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 + t^2) \cdot \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2} \cdot \left(t + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(3 + 4\pi^2)$$

2) Να υπολογιστεί το μήκος τόξου:

i) της καμπύλης $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$ $\forall t \in [0, 2\pi]$
(εάν $t \in [0, 4\pi]$ ποιο το μήκος τόξου της γ;)

ii) της καμπύλης $\rho(t) = (\cos 2t, \sin 2t, \sqrt{5}t)$ $\forall t \in [0, 4\pi]$

ΛΥΣΗ

i) $$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \|(-r \cdot \sin t, r \cdot \cos t)\|\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t}\, dt = 2\pi r.$$

(εάν $t \in [0, 4\pi]$ τότε $L(\gamma) = 4\pi r$ γιατί η καμπύλη θα είχε διαγράψει τον κύκλο 2 φορές)

ii) $L(\rho) = \int_0^{4\pi} \|\rho'(t)\| \, dt = \int_0^{4\pi} \|(2\cos 2t, -2\sin 2t, \sqrt{5})\| \, dt$

$$= \int_0^{4\pi} \sqrt{4\cos^2 2t + 4\sin^2 2t + 5} \; dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{9} \, dt = 12\pi$$

3) i) Έστω $f(x,y,z) = y$ και $\gamma(t) = (0,0,t)$, $0 \leq t \leq 1$

Τότε νδο $\int_\gamma f \, ds = 0$

ii) Έστω $g(x,y,z) = e^{\sqrt{z}}$ και $\gamma(t) = (1,2,t^2)$, $0 \leq t \leq 1$

Τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$\int_\gamma g \, ds = ;$

ΛΥΣΗ

i) Εξ ορισμού του επικαμπύλιου ολοκληρώματος

$$\int_\gamma f \, ds = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt =$$

$$= \int_0^1 f(0,0,t) \cdot \|(0,0,1)\| \, dt =$$

$$= \int_0^1 0 \cdot 1 \, dt = 0$$

ii) Ομοίως, έχουμε:

$$\int_\gamma g \, ds = \int_0^1 g(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt =$$

$$= \int_0^1 g(1,2,t^2) \, \|(0,0,2t)\| \, dt =$$

$$= \int_0^1 e^t \cdot \sqrt{4t^2} \, dt =$$

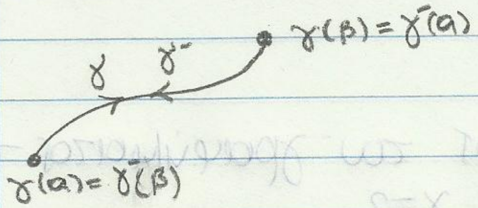
$$= \int_0^1 e^t \cdot 2t \, dt = [e^t \cdot 2t]_0^1 - \int_0^1 2e^t \, dt =$$

$$= 2e - 2(e^1 - e^0) = 2.$$

4) Έστω $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμη και $\gamma^-:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ η αντίστροφη καμπύλη της γ ενώ $f:\gamma([\alpha,\beta])\to\mathbb{R}^n$ συνεχής συνάρτηση

ΝΔΟ $\int_{\gamma^-} f\cdot dx = -\int_\gamma f\cdot dx$

ΛΥΣΗ



$$\int_{\gamma^-} f\cdot dx := \int_\alpha^\beta f(\gamma^-(t))\cdot(\gamma^-)'(t)\,dt =$$

$$=\int_\alpha^\beta f(\gamma(\alpha+\beta-t))\cdot\gamma'(\alpha+\beta-t)(-1)\,dt =$$

$$=-\int_\alpha^\beta f(\gamma(\tau))\cdot\gamma'(\tau)\,d\tau := -\int_\gamma f\cdot dx$$

5) Έστω $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμη και $\phi:[A,B]\to[\alpha,\beta]$ ένας συνεχώς διαφορίσιμος παραμετρικός μετασχηματισμός (δηλ. ϕ "1-1, & επί και γνησίως αύξουσα). Τότε, να δειχθεί ότι:
$\int_{\gamma\circ\phi} f\cdot dx = \int_\gamma f\cdot dx$ όπου $f:\gamma([\alpha,\beta])\to\mathbb{R}^n$ συνεχής

ΛΥΣΗ

$$\int_{\gamma\circ\phi} f\cdot dx := \int_A^B f(\gamma\circ\phi(\tau))\cdot\gamma\circ\phi'(\tau)\,d\tau =$$

$$=\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(\gamma(\underbrace{\varphi(\tau)}_{t}))\cdot\gamma'(\underbrace{\varphi(\tau)}_{t})\,\underbrace{\varphi'(\tau)}_{(t)'=1}\,d\tau =$$

$$=\int_\alpha^\beta (f\circ\gamma)(t)\,\gamma'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) =$$

$$=\int_\gamma f\cdot dx.$$

6) Αν $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη ορίζουμε το μήκος του γραφήματος της f στο $[a,\beta]$ σαν το μήκος της καμπύλης $t\mapsto(t,f(t))$ για κάθε $t\in[a,\beta]$

α) ΝΔΟ το μήκος του γραφήματος της f στο $[a,\beta]$ είναι

$$\int_a^\beta \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

β) Να υπολογιστεί το μήκος του γραφήματος της $y=\log x$ απο $x=1$ εως $x=2$

ΛΥΣΗ

α) $L(\gamma)=\int_a^\beta \|\gamma'(t)\|\,dt=\int_a^\beta \|(1,f'(t))\|\,dt=$

$$=\int_a^\beta \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt = \text{Μήκος γραφήματος της } f$$

Αρα, πράγματι:

$$L(G_f)=\int_a^\beta \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

β) Απο το (α) εχουμε οτι:

$$L(G_f)=\int_1^2 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=\ldots$$

7) Εστω $f(x,y)=(-y,x)^T$ και $\gamma(t)=(r\cdot\cos t,\ r\cdot\sin t)$ $\forall t\in[0,2\pi]$. Να υπολογισετε τα ακόλουθα:
$\int_\gamma f\cdot d(x,y)$ και $\int_{\gamma^-} f\cdot d(x,y)$.

ΛΥΣΗ

[για διανυσματικές συναρτήσεις]

$$\int_\gamma f\cdot d(x,y):=\int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi} f(r\cdot\cos t,\ r\cdot\sin t)\cdot(-r\cdot\sin t,\ r\cdot\cos t)=$$

$$=\int_0^{2\pi} (-r\cdot\sin t,\ r\cdot\cos t)^T\cdot(-r\cdot\sin t,\ r\cdot\cos t)=$$

$$=\int_0^{2\pi} r^2\cdot(\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{1})\,dt=2\pi r^2$$

<u>α' τρόπος</u>: Από την άσκηση (4), άμεσα έχουμε:

$$\int_{\gamma^-} f \cdot d(x,y) = -\int_{\gamma} f \cdot d(x,y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma^-} f \cdot d(x,y) = -2\pi r^2$$

<u>β' τρόπος</u>: (<u>επίπονος</u>)

$$\int_{\gamma^-} f \cdot d(x,y) := \int_0^{2\pi} f(\gamma^-(t))(\gamma^-)'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(\gamma(0+2\pi-t)) \cdot \gamma'(0+2\pi-t)(-1)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(\gamma(2\pi-t)) \cdot \gamma'(2\pi-t)(-1)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (r \cdot \cos(2\pi-t), r \cdot \sin(2\pi-t))\, \gamma'(2\pi-t)(-1)\, dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} (r \cdot \cos t, -r \cdot \sin t)\, (-r\sin(2\pi-t), r\cos(2\pi-t))\, dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} (r\cos t, -r\sin t) \cdot (r\sin t, r \cdot \cos t)\, dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} (r\sin t, r\cos t) \cdot (r\sin t, r\cos t)\, dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = -2\pi r^2$$

Ενώ, κάναμε χρήση των τριγωνομετρικών τύπων:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$